Vorlesung (7), 14. 12. 2021

nächste Woche (am 21.12.) fällt die Vorlesung aus

⌈Wh.: Hatten die Gleichung

$$(*) \qquad \ddot{x} = -\varphi'(\|x\|)\frac{x}{\|x\|} \quad \text{auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

und sind auf dem Weg $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ zu bestimmen.

Hatten die 1. Integrale

$$H(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\|\dot{x}\|^2 + \varphi(\|x\|)$$

und

$$\ell(x,\dot{x}) = x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 .$$

via

Polarkoordinaten

$$(x_1, x_2) = x = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

auf

(a) $\ddot{r} = -r\dot{\theta}^2 - \varphi'(r)$

(b) $\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}}{r}\dot{\theta}$

bei

$$H(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \varphi(r) + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2$$

$$\ell(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta}) = r^2\dot{\theta} .$$

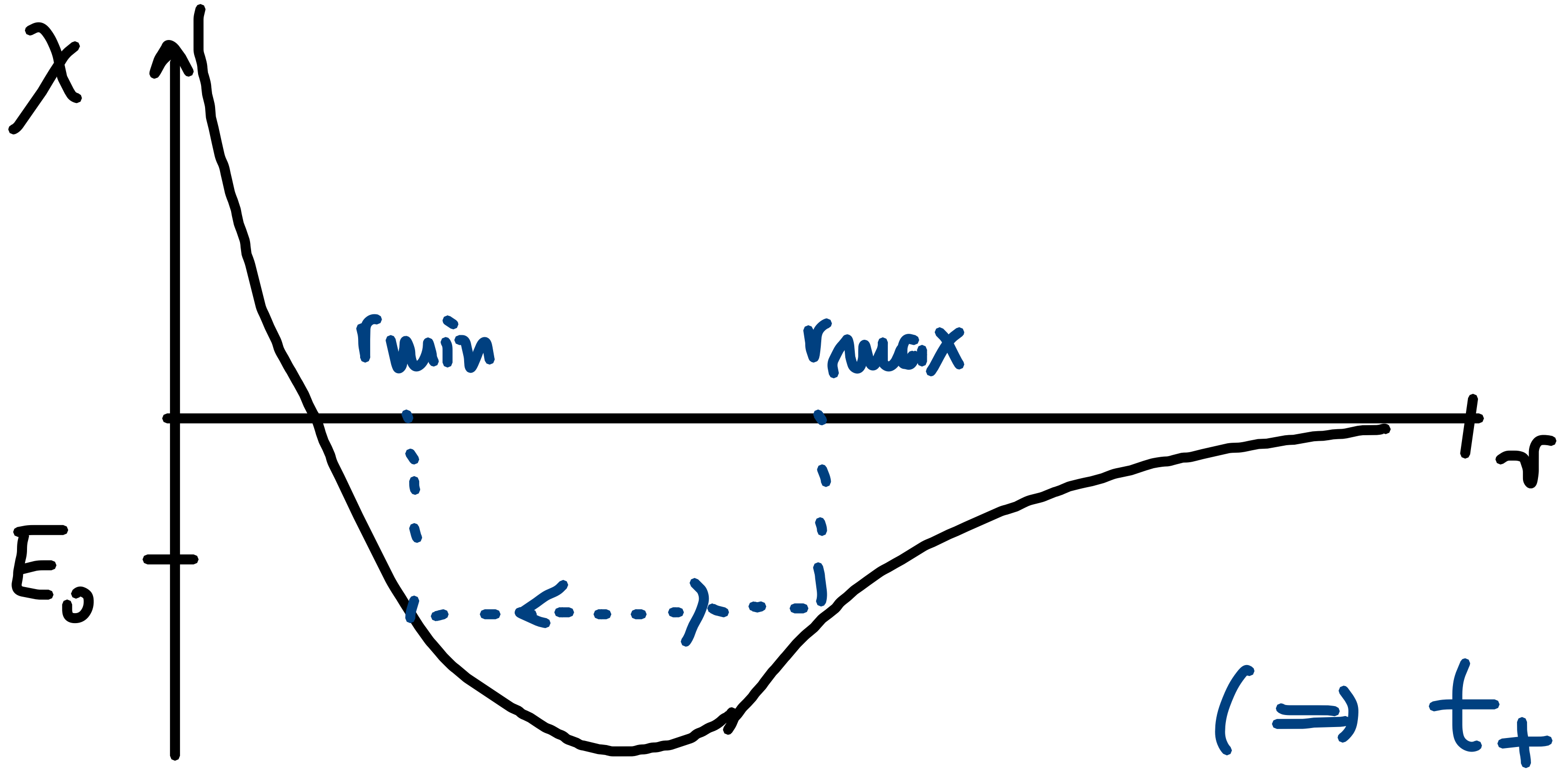
transformiert. $\ell = r^2 \dot{\Theta}$ erlaubt die Bestimmung von Θ bei Kenntnis von r und eingesetzt in (a) erfüllt r die ODE

$$(**) \qquad \ddot{r} = -\varphi'(r) + \frac{\ell^2}{r^3}$$

mit 1. Integral

$$E(r, \dot{r}) = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\left(\varphi(r) + \frac{\ell^2}{2r^2} \right)}_{=: \chi(r) \text{ „effektives Potential"}}$$

χ könnte etwa so aussehen:



$\varphi(r) = -\gamma/r$

$(\Rightarrow t_+(r,\dot{r}) = +\infty.)$

Insgesamt: System ist „vollständig integrabel" durch Quadratur ✓ (für jedes φ)

(2.6) Das 2. Keplersche Gesetz

Ziel: Wollen nun überprüfen, unter welchen Bedingungen an $\varphi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ das 2. Keplersche Gesetz gilt.

Beachte. Alleine, dass L 1. Integral ist, folgt schon der 1. Teil des 1. Keplerschen Gesetzes: Jede Bahn ist eben.

OBdA. Wir dürfen $L = \ell \cdot e_3$ mit $\ell > 0$ annehmen (sonst wechsle auf KO-System mit $e_3 \mapsto -e_3$).

Beobachtung. Wegen $r^2\dot{\theta} = \ell > 0$ und $r^2 > 0$ ist $\dot{\theta} > 0$, also streng monoton wachsend und damit mit

$J := \Theta(I) \subseteq \mathbb{R}$ ist

$$\Theta : I \to J, \; t \mapsto \Theta(t)$$

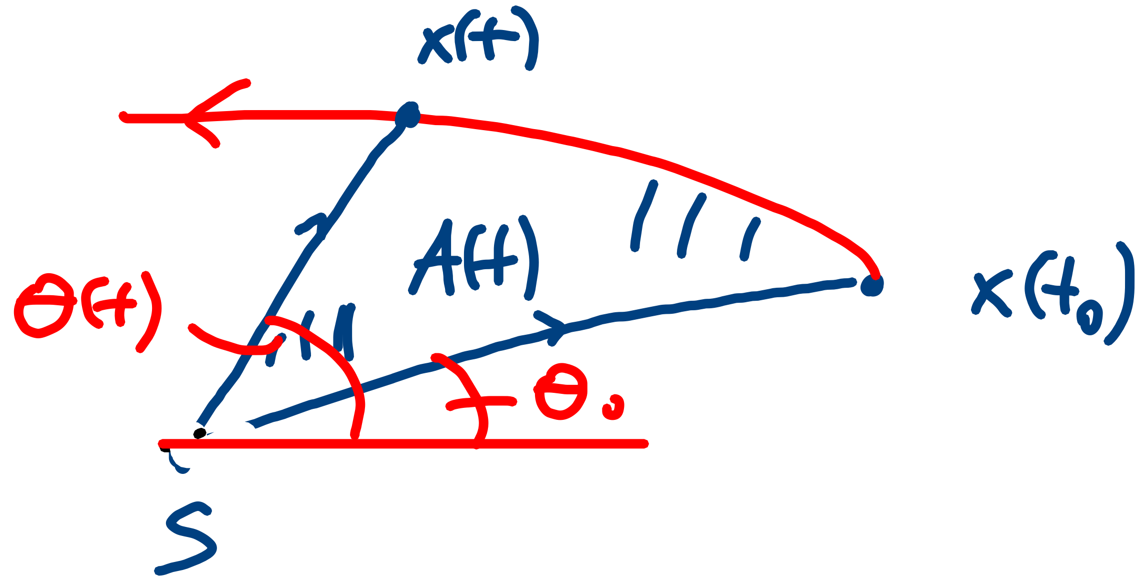
ein Diffeomorphismus („Θ kehrt nicht um.")

<u>Naheliegend</u>: Wir können Parameterwechsel von t auf Θ machen. Beachte für die Umkehrung $t : J \longrightarrow I$, $t = \Theta^{-1}$:

$$t'(\Theta) = \frac{1}{\dot{\Theta}(t(\Theta))} = \frac{1}{\ell} \cdot r^2(t(\Theta))$$

(Θ-Ableitung wird mit $'$ bezeichnet.)

Ziel: Bestimmung der Fläche $A(t) > 0$, die $x(t) = \Phi(r(t), \Theta(t))$ zwischen $t_0 = 0$ und t überstreicht.



Mit $r(t) = r(t(\theta))$ ist das nach der Transformationsformel

$$dx_1 dx_2 = r \cdot dr\, d\theta$$

$$= \underbrace{|\det D\Phi(r,\theta)|}_{= \text{Jacobische von } \Phi}$$

ist:

$$A(t) = \int_{\theta_0}^{\theta} \int_0^{r(\theta)} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{2} r^2(\theta)\,d\theta \underset{SR}{=} \int_0^t \frac{1}{2} r^2(t) \cdot \underbrace{\dot{\theta}\,dt}_{\text{Subst.-regel}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t r^2 \dot{\theta}(t)\,dt$$

Die „Flächengeschwindigkeit" $\dot{A}(t)$ ist also nach dem Hauptsatz:

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{2} r^2(t)\dot{\theta}(t) = \frac{1}{2} \ell$$

und damit nach dem Drehimpulserhaltung konstant.

Satz (2. Kepler-Gesetz) Für jedes rotationsinvariante Gravitationsfeld G ist die Flächengeschwindigkeit jeder Bahn des dyn. Systems $\ddot{x} = G(x)$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ konstant.

Kommentar. (a) Das 2. Kepler-Gesetz kann also nicht herangezogen werden, um φ, und damit G, zu bestimmen.

(b) Wir haben noch das 1. Kepler-Gesetz und das 3. Keplergesetz.

(c) Wir legen „Kepler-1" jetzt so streng aus, dass (bei günstiger Einstellung der Anfangsbedingung $(x_0, \dot{x}_0) \in P$ <u>jede</u> Kreisbahn um $S = 0$ eine Lösung von $\ddot{x} = G(x)$ ist. (Sogar <u>jede</u> Ellipse, die S in einem Brennpunkt hat.)

<u>Rechnung</u>: Sei $R > 0$. Wir nehmen an, dass $t \mapsto r(t) = R$, $\forall t \in \mathbb{R}$, eine Lösung von $\ddot{x} = -\varphi'(\|x\|) \, x/\|x\|$ ist und damit $\dot{r} = 0$. Es folgt dann für den Drehimpuls

$$r^2 \dot{\theta} = \ell = \text{const} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\ell}{R^2} = \text{const}.$$

Nennen wir $\omega := \dot{\theta} = \ell/R^2$. Dann ist die Bewegung auf dem Kreis $\{r = R\}$ sogar „gleichförmig kreisförmig", d.i.

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

Ist $T > 0$ die Periodendauer des Umlaufes, so ist also

$$\theta(T) - \theta_0 = 2\pi,$$

also

$$\omega T = \theta(T) - \theta_0 = 2\pi \implies T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Wegen $\dot{r} = 0$ folgt auch $\ddot{r} = 0$ und daher aus der Bewegungsgleichung

$$0 = \ddot{r} = -\varphi'(r) + \frac{\ell^2}{r^3}$$

mit $\ell = R^2\omega = 2\pi R^2/T$:

$$\varphi'(r) = \frac{4\pi^2 R^4}{T^2 \cdot R^3} = 4\pi^2 \cdot \frac{R}{T^2}$$

Ist nun nach dem 3. Keplergesetz

$$T^2 = \lambda \cdot R^3$$

(mit einem $\lambda > 0$ konstant), so erhält man (mit $c := \frac{4\pi^2}{\lambda}$)

$$\varphi'(R) = \frac{c}{R^2}$$

[bei $R > 0$ beliebig!]

Es folgt:

$$\varphi(r) = -\frac{c}{r}$$ (Newtons Grav.-gesetz)

(mit $c = \omega^2 R^3$). Wir erhalten so (bei Reskalierung $t = \sqrt{c}\cdot\tau$) die Keplersche Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\frac{x}{\|x\|^3} \text{ auf } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

nach der sich die Planeten um die Sonne bewegen.

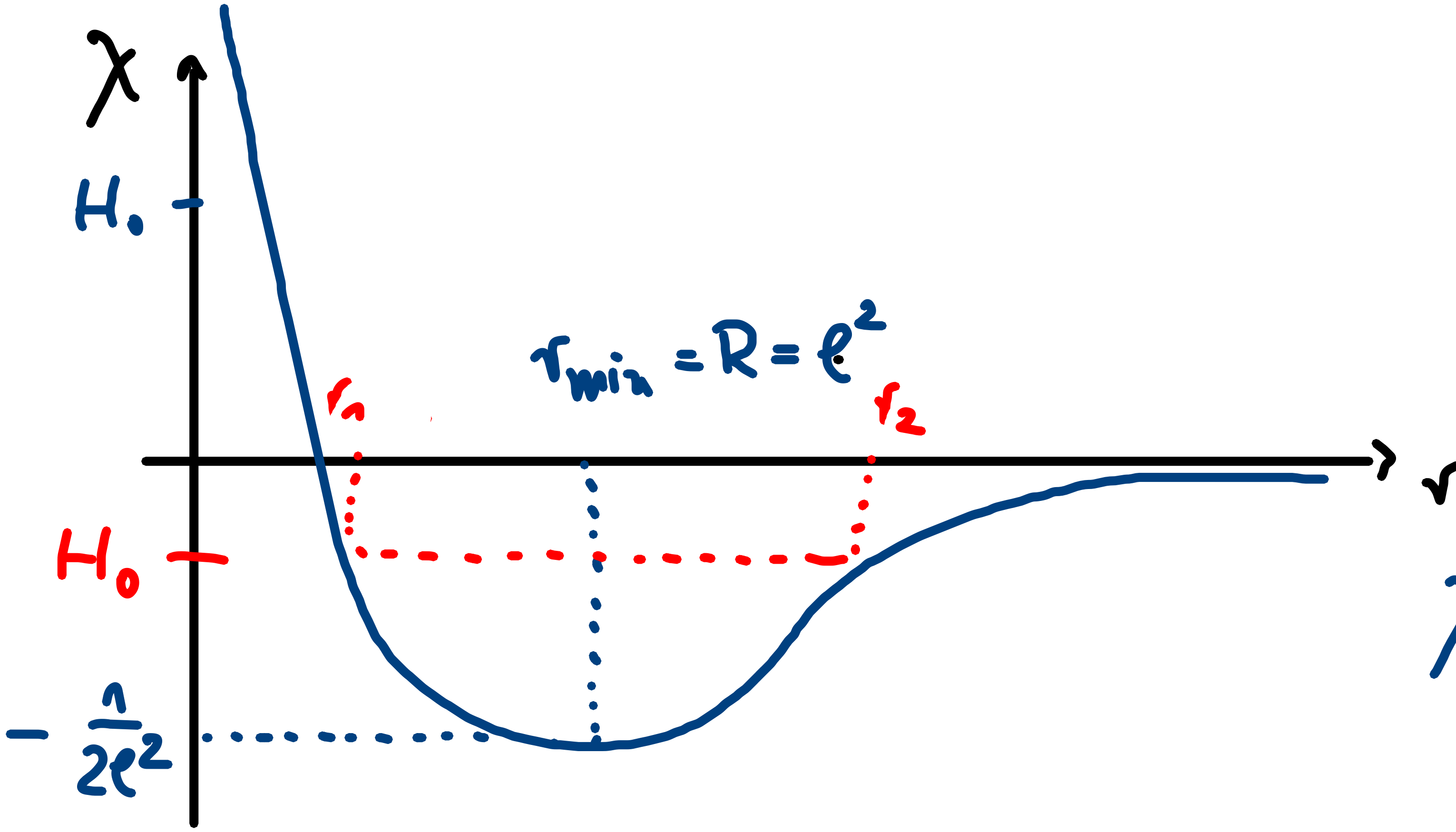
(2.7) Die Lösungen der Keplerschen Gleichung

Wir hatten, dass für $t \mapsto r(t)$ bei Energie H und Drehimpuls $\ell > 0$ gilt:

$$(*) \qquad \ddot{r} = -\varphi'(r) + \frac{\ell^2}{r^3} = -\frac{1}{r^2} + \frac{\ell^2}{r^3}$$

und

$$H = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \left(\varphi(r) + \frac{\ell^2}{2r^2}\right) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\left(-\frac{1}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2}\right)}_{=:\, \chi(r)}.$$



$\ell \neq 0$

$$\chi(r) = -\frac{1}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2}$$

Qualitative Diskussion. (a) Für $\ell = 0$ ergibt sich die Diskussion zur 1-dimensionalen Bewegung (siehe (2.4)).

(b) Für $\ell \neq 0$ verhindert verhindert die „Barriere" $\ell^2/2r^2$ (Zentrifugalenergie) den Sturz des Planeten in die Sonne:

(i) bei $H_0 = H_{min} = -\frac{1}{\ell^2}$ ist $r(t) = R = \ell^2$ konstant (und wegen $\dot{\theta} = \ell/R^2 = \text{const.}$ die Kreisbewegung gleichförmig,

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0 \,, \quad \omega = \ell/R^2 .$$

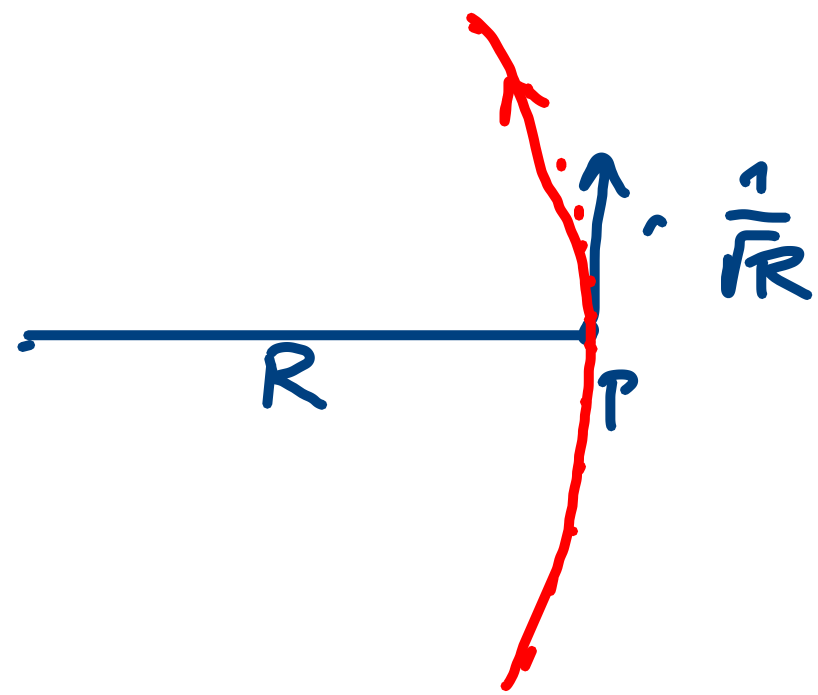
Beachte: Jede Kreisbahn um S ist möglich, denn ist $R > 0$ gegeben, so wähle Anf.-bed. $(x_0, \dot{x}_0) \in P$ so, dass $\ell^2 = R$ ist, also $\ell = \sqrt{R}$ und $H = -1/(2\ell^2) = -1/2R$, etwa durch:

$$x_0 = (R, 0) \,, \quad \dot{x}_0 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{R}}\right),$$

denn: $\ell = R \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} = \sqrt{R}$ und

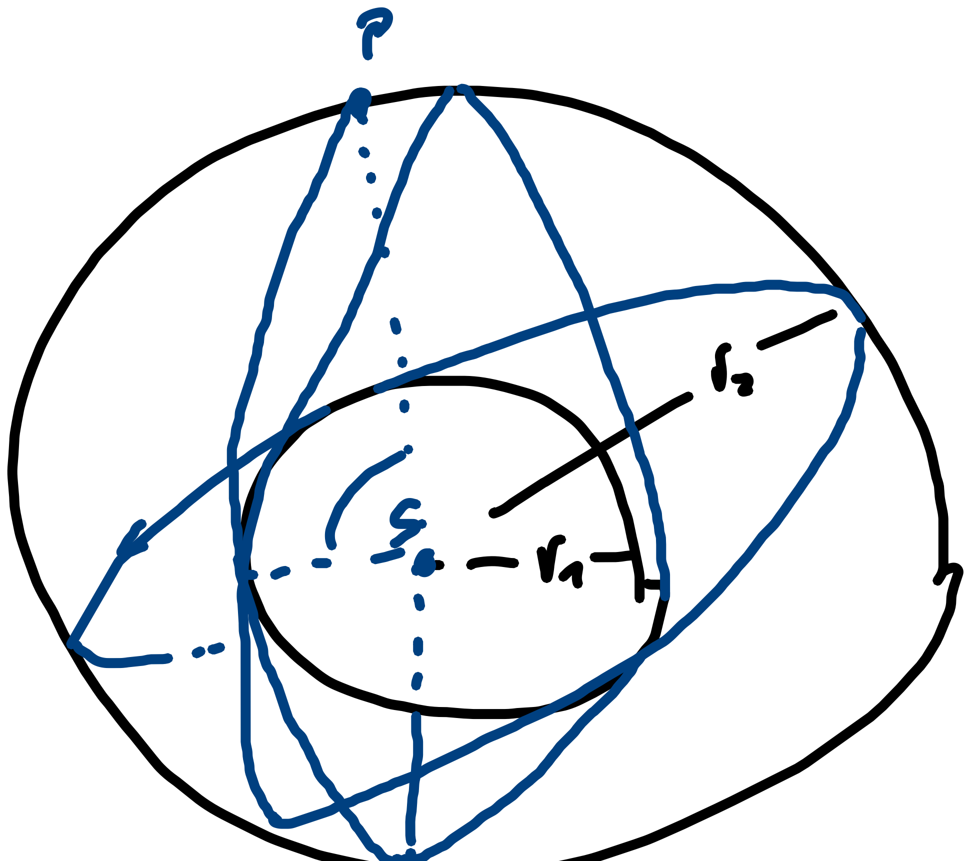
$$H = \frac{1}{2}\|\dot{x}_0\|^2 - \frac{1}{\|x_0\|} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)^2 - \frac{1}{R}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{R} - \frac{1}{R} = -\frac{1}{2R}.$$



(ii) Für $H_{min} < H_0 < 0$: Bahn ist beschränkt und pendelt zwischen den Kreisbahnen $\{r = r_1\}$ und $\{r = r_2\}$ hin und her.

[Achtung: Nicht klar ist, ob $t \mapsto x(t)$ geschlossen ist. Hängt davon ab, ob bei Periode $T > 0$ der r-Bahn $T/2\pi$ rational oder irrational ist.]



(iii) Für $H \geq 0$ erreicht $t \mapsto r(t)$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ ihr Minimum und geht dann (in unendlicher Zeit) nach ∞.

Beachte weiter, dass alle Paare $(H, \ell) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$-\frac{1}{2\ell^2} \leq H < 0$$

für die beschränkten Bahnen möglich sind.

Zeige abschließend:

(i) Dies sind alle Ellipsen mit S in einem Brennpunkt (Kepler-1)

(ii) Für die Periodendauer $T > 0$ und großen Halbachse $a > 0$ gilt:

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot a^3.$$